## Лабораторная работа №5

Разобрать 7 задач с предложенным решением.

Использовать теорию в приложенных файлах, лекции или сеть Интренет.

Устно защищить каждую.

Задачи связаны с арифметическими операциями между автоматами(сумма, произведение, вычитание), логическими операциями (объединение, пересечение и суперпозиция), построение вероятностного автомата.

## Задание №1

Заданы автоматы **А**и **В**. Найти их объединение и пересечение

 

## Решение.

Объединением автоматов **А** и **В** является автомат **С=А∪В=(X, Q, Y, *q1∈*Q, F(*x∈*X/*y∈*Y)),** определяемый формулами:



Находим соответствующие множества, обозначив:

**X={*x1A, x2A, x1B, x2B, x3B*}; Y={ *y1A, y2A, y1B, y2B, y3B* }; Q={*q1, q2, q3*}**

Автоматная таблица искомого объединения :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x***  ***q*** | ***х1А*** | ***х2А*** | ***х1B*** | ***х2B*** | ***х3B*** |
| ***1*** | ***2 / y2A*** | ***1 / y1A*** | ***2/y2B*** | ***1 / y1B*** | *2 / y3B* |
| ***2*** | ***3 / y1A*** | ***1 / y2A*** | ***-*** | ***1 / y2B*** | *2/y1B* |
| ***3*** | *2 / y1A* | *1 / y1A* | *∅* | *∅* | *∅* |

Пересечением автоматов **А** и **В** является автомат **С=А∩В==(X, Q, Y, *q1∈*Q, F(*x∈*X/*y∈*Y)),** определяемый формулами:



Автоматная таблица искомого объединения включает в себя соответствующие

множества: **X={*x1, x2*}; Y={ *y1, y2*}; Q={*q1, q2*}**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***q*** | ***х1*** | ***х2*** |
| ***1*** | ***2y2*** | *1 / y1* |
| ***2*** | ***-*** | *1 / y2* |

## Задание №2

Заданы автоматы **А** и **В**. Найти автомат **С=А×В**, равный их произведению.

 

## Решение

Произведением **×** произвольных непустых автоматов **А=(X, Q, Y, *q1∈*Q, F(*x∈*X/*y∈*Y))** и

**B=(U, W, V, *w1∈W*, P(*u∈*U/*v∈*V))**, является автомат **K=(Z, H, S, *h1∈*H, R(*z∈*Z/*s∈*S)),** множества которого являются декартовым произведением соответствующих множеств исходных автоматов:



где ***q∈*Q, *w∈W, h∈*H, *h1=(q1, w1).***

Находим соответствующие множества:

**Z={(*x1 u1*), (*x1 u2*), (*x2 u1*), (*x2 u2*)}={*z1 z2 z3 z4*}**

**S={(*y1 v1*), (*y1 v2*), (*y2 v1*), (*y2 v2*)}={*s1 s2 s3 s4*}**

**H={(*q1 w1*), (*q1 w2*), (*q2 w1*), (*q2 w2*)}={*h1 h2 h3 h4*}**

Полученная автоматная таблица:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***z***  ***h*** | ***z1*** | ***z2*** | ***z3*** | ***z4*** |
| ***1*** | ***h2  / s3*** | ***—*** | ***h4 / s3*** | ***—*** |
| ***2*** | ***h1 / s3*** | ***h2 / s4*** | ***h3 / s3*** | h4 / s4 |
| ***3*** | ***h4 / s1*** | ***—*** | ***h2 / s3*** | ***—*** |
| ***4*** | *h****3 /*** *s****1*** | *h****4 /*** *s****3*** | *h1* ***/*** *s****3*** | *h****2 /*** *s****4*** |

## Задание №3

Заданы автоматы **А** и **В**. Найти автомат **С=А⊗В**, равный их произведению.

 

## Решение

Произведением **C=A⊗B** произвольных непустых автоматов **А=(X,Q,Y, *q1∈*Q, F(*x∈*X/*y∈*Y))** и **B=(X,W,V, *w1∈W*,P(*u∈*U/*v∈*V))**, является автомат

**C=(X, H, S, *h1∈*H, R(*z∈*Z/*s∈*S)),**

множества которого определяются формулами:



где ***q∈*Q, *w∈W, h∈*H, *h1=(q1, w1),*** а ***Fxq*** и ***Pxw —*** отображения состояний ***q*** и ***w*** соответственно по букве входного алфавита ***x∈*X *.***

Находим соответствующие множества:

**S={(*y1 v1*), (*y1 v2*), (*y2 v1*), (*y2 v2*)}={*s1 s2 s3 s4*}**

**H={(*q1 w1*), (*q1 w2*), (*q2 w1*), (*q2 w2*)}={*h1 h2 h3 h4*}**

Для нахождения **Rh** сперва найдем соответствующие сомножители:

***Fx1q Px1w Fx1 q* × *Px1 w***

|  |  |
| --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***x1*** |
| ***q1w1*** | *q2w1 / y1 v2* |
| ***q1w2*** | *—* |
| ***q2w1*** | *q1w1 / y2 v2* |
| ***q2w2*** | *—* |

|  |  |
| --- | --- |
| ***x***  ***w*** | ***x1*** |
| ***1*** | *w1 / v2* |
| ***2*** | *—* |

|  |  |
| --- | --- |
| ***x***  ***q*** | ***х1*** |
| ***1*** | *q2 / y1* |
| ***2*** | *q1 / y2* |

***Fx2q Px2w Fx2 q* × *Px2 w***

|  |  |
| --- | --- |
| ***x***  ***w*** | ***x2*** |
| ***1*** | *w2 /v1* |
| ***2*** | *w1/ v2* |

|  |  |
| --- | --- |
| ***x***  ***q*** | ***х2*** |
| ***1*** | *—* |
| ***2*** | *q1 / y1* |

|  |  |
| --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***x2*** |
| ***q1w1*** | ***—*** |
| ***q1w2*** | ***—*** |
| ***q2w1*** | ***q1w2/y1v1*** |
| ***q2w2*** | *q1w1 / y1 v2* |

И получаем искомую автоматную таблицу (с учетом переименования элементов):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***x1*** | ***x2*** |
| ***v1*** | *h3 / s2* | ***—*** |
| ***v2*** | *—* | ***—*** |
| ***v3*** | *h1 / s4* | ***h2/s1*** |
| ***v4*** | *—* | *h1 / s2* |

## Задание №4

Заданы автоматы **А** и **В**. Найти их сумму **А+В**.

 

## Решение

Суммой **С=А+B** произвольных непустых автоматов

**А=(X,Q,Y, *q1∈*Q, F(*x∈*X/*y∈*Y))** и **B=(U,W,V, *w1∈W*, P(*u∈*U/*v∈*V))**,

является автомат **C=(Z, H, S, *h1∈*H, R(*z∈*Z/*s∈*S)),**

множества которого определяются формулами:



где ***q∈*Q, *w∈W, h∈*H, *h1=(q1, w1)***

Поскольку **X∩U=∅, Y∩V=∅,** выражения множеств входных и выходных сигналов суммы упрощаются:



Находим множества:

**Z*={x1, x2, u1, u2}={ z1 z2 z3 z4 }***

**H={(*q1 w1*), (*q1 w2*), (*q2 w1*), (*q2 w2*)}={*h1 h2 h3 h4*}**

**S={*y1 ,y2 ,v1 ,v2*}={*s1 s2 s3 s4*}**

Для нахождения **Rh** сперва найдем соответствующие сомножители:

***Fq* × *{w} {q}*×*Pw***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***x1*** | ***x2*** |
| ***q1w1*** | ***—*** | *q1w1 / y1* |
| ***q1w2*** | ***—*** | *q1w2 / y1* |
| ***q2w1*** | *q1w1 / y2* | *q2w1 / y1* |
| ***q2w2*** | *q1w2 / y2* | *q2w2 / y1* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***u1*** | ***u2*** |
| ***q1w1*** | *q1w2 / v1* | *—* |
| ***q1w2*** | *q1w1 / v1* | *q1w2 / v2* |
| ***q2w1*** | *q2w2 / v1* | *—* |
| ***q2w2*** | *q2w1 / v1* | *q2w2 / v2* |

Результирующая автоматная таблица с учетом переименований:

***Rh=***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***z***  ***qw*** | ***z1*** | ***z2*** | ***z3*** | ***z4*** |
| ***h1*** | ***—*** | *h1 / s1* | *h2 / s3* | ***—*** |
| ***h2*** | ***—*** | *h2 / s1* | *h1 / s3* | *h2 / s4* |
| ***h3*** | *h1 / s2* | *h3 / s1* | *h4 / s3* | ***—*** |
| ***h4*** | *h2 / s2* | *h4 / s1* | *h3 / s3* | *h4 / s4* |

## Задание №5

Заданы автоматы **А** и **В**. Найти их суперпозицию **А\*В**.

 

## Решение

Суперпозицией **С=А\*B** произвольных непустых автоматов

**А=(X,Q,Y, *q1∈*Q, F(*x∈*X/*y∈*Y))** и **B=(U,W,V, *w1∈W*, P(*u∈*U/*v∈*V))**,

является автомат **C=(X, H, V, *h1∈*H, R(*z∈*Z/*s∈*S)),**

множества которого определяются формулами:



где ***q∈*Q, *w∈W, h∈*H, *h1=(q1, w1).***

Получаем:

***Fy1 q Py1 w Fy1 q* × *Py1 w***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***q*** | ***х1*** | ***x2*** |
| ***1*** | ***—*** | *q2 / y1* |
| ***2*** | ***—*** | *q1 / y1* |

|  |  |
| --- | --- |
| ***y***  ***w*** | ***y1*** |
| ***1*** | *—* |
| ***2*** | *w2 / v1* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***x1*** | ***x2*** |
| ***q1w1*** | *—* | *—* |
| ***q1w2*** | ***—*** | *q2w2 / v1* |
| ***q2w1*** | ***—*** | *—* |
| ***q2w2*** | ***—*** | *q1w2 / v1* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***qw*** | ***x1*** | ***x2*** |
| ***q1w1*** | ***—*** | ***—*** |
| ***q1w2*** | ***—*** | ***—*** |
| ***q2w1*** | *q1w2 / v2* | ***—*** |
| ***q2w2*** | *q1w1 / v2* | ***—*** |

***Fy2q Py2w Fy2 q* × *Py2 w***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***q*** | ***х1*** | ***x2*** |
| ***1*** | ***—*** | *—* |
| ***2*** | *q1 / y2* | *—* |

|  |  |
| --- | --- |
| ***y***  ***w*** | ***y2*** |
| ***1*** | *w2 / v2* |
| ***2*** | *w1 / v2* |

С учетом **H={(*q1 w1*), (*q1 w2*), (*q2 w1*), (*q2 w2*)}={*h1 h2 h3 h4*}** получаем :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x***  ***h*** | ***x1*** | ***x2*** |
| ***h1*** | ***—*** | ***—*** |
| ***h2*** | ***—*** | *h4 / v1* |
| ***h3*** | *h2 / 21* | ***—*** |
| ***h4*** | *h1 / v2* | *h2 / v1* |

## Задание №6

Вероятностные автоматы без выходов **А=(X, Q, *q1∈*Q, P)** и  **B=(Y, V, *v1∈*V, S),**

где **X={*x1,x2*}, Q={*q1, q2*}, P={*Px1 , Px2*}, Y={ *y1,y2*}, V={*v1,v2*}, S={*Sx1 , Sx2*},**

заданы своими стохастическими матрицами **P** и **S.**

Найти вероятностные автоматы, равные их произведению и сумме.



## Решение

Операция произведения для вероятностного автомата **С=A×B= *(Z,W,w1∈W, R)*** определяется так:



где ***w1=(q1, v1),*** а ***R*** — результирующая стохастическая матрица автомата ***С***, полученная декартовым произведением образуемое по правилу прямого произведения матриц из ***P*** и ***S***.

Определим эти множества:

**Z={(*x1 y1*), (*x1 y2*), (*x2 y1*), (*x2 y2*)}={*z1 z2 z3 z4*}**

**H={(*q1 v1*), (*q1 v2*), (*q2 v1*), (*q2 v2*)}={*h1 h2 h3 h4*}**

**R={(Px*1 × Sy1*), (Px*1 × Sy2*), (Px*2 × Sy1*), (Px*2 × Sy2*)}={*Rz1 Rz2 Rz3 Rz4*}**



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1/3 | 2/3 | 0 | 0 |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1/6 | 2/6 | 1/6 | 2/6 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1/4 | 3/4 | 0 | 0 |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1/8 | 3/8 | 1/8 | 3/8 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1/6 | 2/6 | 1/6 | 2/6 |
| 2/3 | 0 | 1/3 | 0 |
| 2/9 | 4/9 | 1/9 | 2/9 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1/6 | 2/6 | 1/6 | 2/6 |
| 2/3 | 0 | 1/3 | 0 |
| 2/12 | 6/12 | 1/12 | 3/12 |

Здесь матрицы Rzk имеют элементами вероятности перехода из состояния, определяемого строкой, в состояние определяемое столбцом по входной букве zk

Операция суммы для вероятностного автомата **С=A+B= *(Z,W,w1∈W, R)*** определяется так:



где ***w1=(q1, v1),*** а ***EA*** *и* ***EB*** — единичные матрицы порядка матриц из **P** и **S** соответственно.

Определим эти множества:

**Z={*x1*, *x2*,  *y1*, *y2*}={*z1 z2 z3 z4*}**

**H={(*q1 v1*), (*q1 v2*), (*q2 v1*), (*q2 v2*)}={*h1 h2 h3 h4*}**

**R={(Px*1 × EB),* (Px*1 × EB), (EA× Sy1*), *(EA× Sy2*)}={*Rz1 Rz2 Rz3 Rz4*}.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1/3 | 2/3 | 0 | 0 |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 1/6 | 2/6 | 1/6 | 2/6 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 |
| 0 | 1/2 | 0 | 1/2 |
| 2/3 | 0 | 1/3 | 0 |
| 0 | 2/3 | 0 | 1/3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1/3 | 2/3 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1/3 | 2/3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1/4 | 3/4 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1/4 | 3/4 |

Смысл элементов матриц тот же, что и в предыдущем листе.

**Задание №7**

В базисе ДНФ синтезировать комбинационный автомат, реализующий булеву формулу . Результат представить в виде структурной схемы.

## Решение

x3

x4

x2

x1

V

F

&

&

V